ENSEIGNER LES PROBABILITÉS AU CYCLE 4 EN LIEN AVEC LA STATISTIQUE

Philippe DUTARTE
Inspecteur d'académie – Inspecteur pédagogique régional
Académie de Créteil
philippe.dutarte@ac-creteil.fr

Résumé. Les probabilités s'enseignent dorénavant en France dès la classe de cinquième. Cela suppose une nouvelle progressivité des apprentissages, davantage de place à l'expérimentation, à la définition des concepts et à l'élaboration du lien qu'entretiennent probabilités et statistique. Il y a beaucoup à perdre à cloisonner les enseignements des probabilités et de la statistique et tant à gagner à croiser les approches. Les nouveaux programmes du cycle 4 le permettent en favorisant, dès la classe de cinquième, expérimentation physique et simulation. Nous analysons des pratiques menées à l'étranger et dans l'académie de Créteil.

Mots-clés. Probabilités, statistique, collège, approche empiriste, approche fréquentiste, expérimentation, simulation.

Abstract. Probability is now taught from the age of 12 (Br: year 7-lower secondary school/ U.S: 7th grade -Middle School) in France, which implies a new progressivity of learning. It also means a greater place given to experimental approach, to the definition of concepts and to the development of the link between probability and statistics. There is nothing to gain cutting off the teaching of probability from the teaching of statistics. On the contrary !
The new curriculum of "cycle 4" allows cross-teaching approaches from year 7 by insisting on physical experiment and simulation. We analyse practices implemented abroad and in Créteil Academy

Keywords. Probability, statistics, lower secondary school, frequentist approach, physical experiment, simulation.

Les probabilités s'enseignent dorénavant en France dès la classe de cinquième. Cela suppose une nouvelle progressivité des apprentissages, davantage de place à l'expérimentation, à la définition des concepts et à l'élaboration du lien qu'entretiennent probabilités et statistique. Nous analysons ici, à la lumière de pratiques pédagogiques menées en France et à l'étranger, certains points nous semblant incontournables d'une progression de l'apprentissage des probabilités au collège prenant appui sur l'expérimentation et la statistique.

Deux principes incontournables

Deux principes pédagogiques nous semblent incontournables dans les premiers apprentissages de la notion de probabilité : d'une part, partir d'une évaluation des conceptions a priori des élèves sur le hasard, d'autre part, exploiter, dès le début de l'apprentissage, une double approche empiriste et théorique de la notion de probabilité.

Partir d'une évaluation des conceptions a priori des élèves

L'être humain possède certaines conceptions a priori du hasard qui peuvent être causes d'erreur ou d'incompréhension. Il est particulièrement utile de tester certains « biais » dus à des conceptions a priori des élèves et d'en débattre avant de débuter un « enseignement » des probabilités comme si le terrain était vierge.

Parmi ces « idées fausses », citons (la liste n'est pas exhaustive) :

– le refus de mesure du hasard (tout est possible, on ne peut rien dire) ;

– le biais d'équiprobabilité (a priori tous les cas possibles sont équiprobables) ;

– le biais d'alternance (on imagine certaines régularités du hasard et, à pile ou face, PFFP semblera plus probable que PPPP par exemple) ;

– l'effet mémoire (si l'on a eu quatre fois pile on a plus de chances d'avoir face au prochain lancer ; on applique la loi des grands nombres sur des petits nombres) ;

– la confusion effectifs-fréquence (la probabilité correspond à un effectif et non à une fréquence) ou une erreur sur la base d'évaluation d'une proportion ;

– mauvaise prise en compte de la taille de l'échantillon…

Il paraît nécessaire de tester ces conceptions, de réaliser des expériences aléatoires (éventuellement prolongées par la simulation) pour montrer que les observations sont en contradiction avec certaines opinions a priori.

Exploiter une double approche empiriste (approche fréquentiste) et théorique (approche classique a priori)

Ni l'approche empirique, expérimentale, ni l'approche théorique, classique, de la notion de probabilité ne permettent à elles seules d'en comprendre les différentes dimensions. Il est nécessaire de développer ces deux idées simultanément et d'en montrer la dépendance, particulièrement dans le cadre de la modélisation.

À ce propos, le didacticien Heinz Steinbring (1991) s'exprime ainsi :

> « Il est nécessaire de créer un cadre éducatif dans lequel les liens mutuels entre probabilités et hasard, aussi bien qu'entre les différents concepts de probabilité, permettent aux conceptions et à la théorie de se développer à l'unisson. Le processus d'enseignement doit répondre au paradoxe selon lequel la clarification et la compréhension des concepts fondamentaux [en probabilité] ne peut se réaliser qu'avec la théorie complète des cours d'enseignement des années à venir. Une condition nécessaire importante pour satisfaire à cette exigence en classe est d'éviter de développer l'éducation à l'aléatoire exclusivement en termes de fréquence ou de symétrie classique. […]
>
> Même un concept aussi élémentaire que l'équiprobabilité nécessite simultanément l'interprétation mathématique idéale d'égale distribution au sens arithmétique, et la représentation empirique du statistiquement équidistribué, telle qu'elle émerge des expériences concrètes. L'équidistribution comme modèle ne signifie pas que les résultats réels devraient être exactement équidistribués ; si cela se produit réellement c'est une raison suffisante pour douter de l'expérience. Le modèle de l'exacte équidistribution est requis comme référence pour décider si les fréquences observées peuvent être considérées comme issues d'une telle distribution uniforme, ou si les écarts sont trop grands pour une telle affirmation. […] Les relations entre objet et modèle doivent toujours rester à l'esprit durant le processus d'enseignement. La dialectique objet-modèle nécessite une approche mixte. »

Pour Heinz Steinbring, l'apprentissage de la notion de probabilité doit comporter les étapes suivantes :

– jugements personnels et « prédiction » à propos de phénomènes aléatoires ;

– comparaison entre les données empiriques (expérimentations) et différents modèles théoriques conjecturés (simulations éventuelles) ;

– création de principes généraux et caractérisation plus précise des phénomènes aléatoires.

Graham Jones, chercheur australien, fait le constat suivant dans un article de 2005 dressant l'état des lieux des recherches en didactique des probabilités.

> « Le contenu de ce que l'on doit enseigner en probabilités a connu plusieurs changements depuis plus de 15 ans [2005] durant lesquels les probabilités sont devenues une part du tronc commun d'enseignement. […] Les changements en cours ont conduit à mettre davantage en avant les probabilités expérimentales et leur lien avec les probabilités théoriques. De plus, en conséquence de ces changements, le lien puissant et historique entre probabilités et inférence statistique est devenu plus transparent. […] Les recherches et expérimentations pédagogiques de ces 15 dernières années ont conduit à un effort concerté pour lier statistique et probabilités en relevant les défis de « quoi enseigner » et « comment enseigner ». »

Des repères de progression des apprentissages

On peut distinguer trois niveaux d'apprentissage de la notion de probabilité au collège, pour lesquels nous indiquons ci-après quelques savoir-faire correspondants. Il serait extrêmement réducteur de considérer que ces niveaux correspondent aux attendus de chaque année du cycle 4 (cinquième, quatrième, troisième), ce qui serait d'ailleurs contraire à l'esprit curriculaire des programmes selon lequel il est souhaitable de différencier les apprentissages : les élèves pourront aborder une situation donnée à des niveaux différents.

Niveau 1

– Pratiquer des jeux de hasard simples. Lister les issues possibles. Anticiper des résultats. Vérifier par réalisation de l'expérience aléatoire puis, le cas échéant à l'aide d'une simulation fournie. Enregistrer les résultats observés dans un tableau d'effectifs et de fréquences. Repérer des variations et des régularités. Comparer des graphiques de distributions fréquentielles et théoriques. Choisir une stratégie en fonction de l'analyse des résultats.

– Maîtriser le langage des chances égales ou non, de jeu équitable ou non. Connaître le fait que les dés, les pièces, les roulettes, les boules d'une urne… n'ont pas de mémoire.

– Comparer deux ou plusieurs événements à partir de leurs résultats possibles, en utilisant des relations comme « il est plus probable que… », « il est moins probable que… ». Utiliser une « échelle des probabilités ».

Niveau 2

– Analyser des caractéristiques des événements complémentaires, des événements s'excluant mutuellement, des événements indépendants.

– Comparer des graphiques de distributions (fréquentielle et théorique) en réalisant plusieurs fois une expérience aléatoire. Utiliser des simulations.

– Observer la fluctuation des fréquences pour un nombre de répétitions fixé de l'expérience aléatoire. Estimer une probabilité inconnue.

– Faire preuve d'esprit critique face à des affirmations concernant des phénomènes aléatoire, notamment extraites des médias.

Niveau 3

– Utiliser des tableaux ou des arbres pour des calculs simples de dénombrement des cas.

– Concevoir des simulations simples.

– Calculer la probabilité de réalisation de deux événements s'excluant mutuellement et deux événements complémentaires (règle de la somme).

– Calculer la probabilité de réalisation de deux événements indépendants (règle du produit).
– Analyser des conditions nécessaires pour qu'un jeu de hasard soit équilibré, sur la base de la notion de résultats équiprobables et non équiprobables.
– Faire le lien entre fréquence et probabilité en fonction du nombre de répétition de l'expérience aléatoire. Calculer des fréquences pour estimer des probabilités.
– Traiter des expériences aléatoires à deux étapes.

Des exemples d'activités praticables au niveau 1

Le programme de cycle 4 demande, dès le début du cycle, c'est-à-dire dès la classe de cinquième, « d'interroger les représentations initiales des élèves, en partant de situations de la vie quotidienne […], en suscitant des débats », d'introduire et de consolider « le vocabulaire lié aux notions élémentaires de probabilités (expérience aléatoire, issue, probabilité) », de calculer des probabilités en s'appuyant sur le modèle équiprobable et de mettre en œuvre « le lien avec les statistiques […] en simulant une expérience aléatoire, par exemple avec un tableur ».

Tester les conceptions a priori des élèves

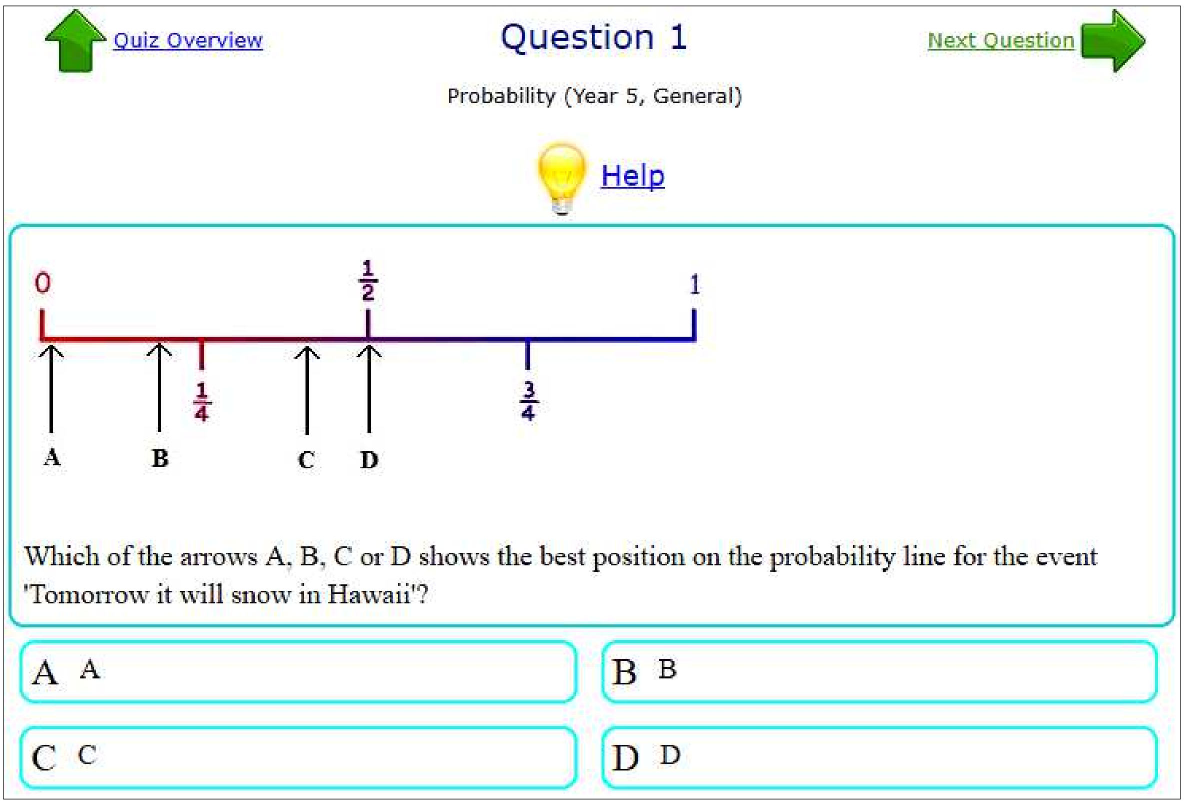
Certaines des questions suivantes sont inspirées de l'article de Jacques VERDIER, où des réponses d'élèves sont analysées. Pour expliquer certaines réponses, le recours à la simulation s'avère utile.

Q1. En lançant un dé, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : un 2 ou un 6 ?
Pourquoi ?
Q2. On joue avec deux dés, en les lançant chacun notre tour. Je prétends que c'est plus difficile pour moi de faire un double six que pour toi de faire un double trois.
Ai-je raison ?
Q3. « Si je lance simultanément deux pièces de 1 €, il y a une chance sur trois de voir un pile et un face » : cette affirmation est-elle vraie ou fausse ?
Q4. On lance quatre fois une pièce de 1 € et on note la suite des « pile » (P) ou « face » (F). Quel est le plus probable, obtenir PPPP ou obtenir PFFP ?
Q5. On lance plusieurs fois un dé dont trois faces sont bleues et trois faces sont jaunes. Que va-t-il se passer ?
Q6. On lance plusieurs fois un dé dont deux faces sont bleues et quatre faces sont jaunes. Que va-t-il se passer ?
Q7. Dans une boîte il y a trois boules noires et six boules blanches. Dans une autre, il y a sept boules noires et quatorze boules blanches. On prend au hasard une boule dans l'une des boîtes. Dans quelle boîte a-t-on le plus de chances d'avoir une boule noire ?
Q8. Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer ; pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?
Q9. Céline et Paul jouent aux dés, chacun avec son dé. Mais Paul est un peu tricheur, et a échangé son dé avec un autre qui n'a que des 6 sur toutes les faces. Quand Céline lance son dé, peut-on prévoir quel numéro sortira ? Et quand Paul lance le sien ?
Pourquoi ?
Q10. On a fabriqué un dé spécial pour faire des paris. Il a trois faces avec un 1, deux faces avec un X, et une face avec un 2. Si on le lance, qu'est-ce qui sera le plus facile à obtenir ? Et qu'est-ce qui sera le moins facile ? Pourquoi ?
Q11. On lance deux dés. Si le total des deux est supérieur à 9, tu marques un point ; si cette somme est inférieure à 4, c'est moi qui marque un point. Qui a le plus de chances de gagner ?
Q12. Dans un jeu de société, tu dois faire un total de six pour commencer à jouer.

Tu peux lancer au choix un seul dé, ou deux dés. Que choisis-tu ? Et s'il fallait faire un total de cinq ?

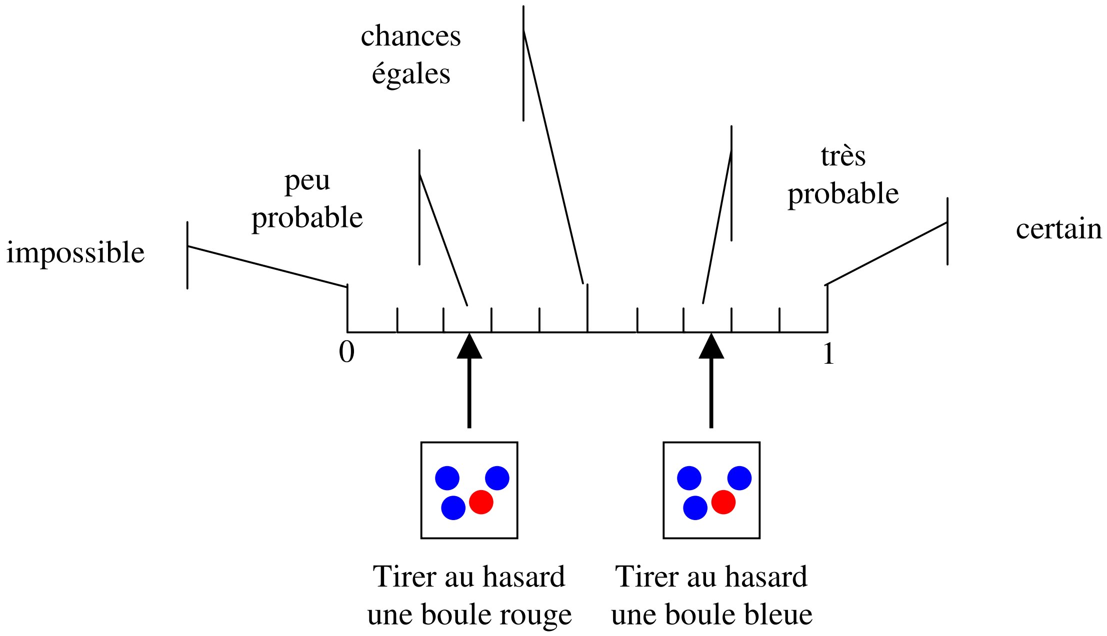
Utiliser une échelle de probabilité

La familiarisation à la mesure d'une probabilité par utilisation d'une « échelle de probabilités » est particulièrement développée au Royaume-Uni ou aux Etats-Unis comme l'illustre l'image suivante d'un jeu de probabilités utilisant ce type d'échelle sur le site scolaire de la BBC ou d'un quiz sur un site américain http://www.mathopolis.com.

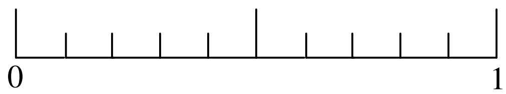


Énoncé

On peut indiquer la probabilité d'un événement sur une échelle de probabilité comme ci-dessous, depuis 0, événement impossible, jusqu'à 1, événement certain.

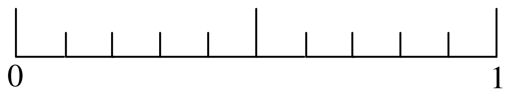


1. Placer une flèche sur l'échelle de probabilité pour indiquer la probabilité des événements suivants.



a) Vous lancez une pièce d'un euro et obtenez « face ».
b) Noël sera cette année le 25 décembre.
c) Il va pleuvoir durant la première semaine de décembre.
d) Un homme a trois têtes.
e) Vous jouez au loto et gagnez le gros lot.
f) Vous lancez un dé et obtenez un nombre pair.
g) Il va pleuvoir demain.
h) L'équipe de France va remporter son prochain match international de football.
i) Un élève de votre classe a son anniversaire demain.

2. Un sac contient trois balles blanches et deux balles grises. Placer une flèche sur l'échelle de probabilités suivante pour indiquer :
a) la probabilité d'extraire au hasard une balle blanche du sac ;
b) la probabilité d'extraire au hasard une balle grise du sac.



Questionnaire à choix multiples

1. Quelque chose qui se produit de façon peu probable a une probabilité entre :

    0 et 0,5
    0,5 et 1
    1 et 2

2. Quelque chose qui se produit de façon probable a une probabilité entre

   0 et 0,5
   0,5 et 1
   1 et 2

3. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 avec un dé supposé équilibré ?

   un sixième
   un
   zéro

4. Quelle est la probabilité d'obtenir « face » avec une pièce supposée équilibrée ?

   1
   0,5
   0,2

5. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair avec un dé supposé équilibré ?

   un sixième
   un tiers
   un demi

6. Une pièce supposée équilibrée est lancée trois fois. Elle tombe deux fois sur « face » et une fois sur « pile ». Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur pile au prochain lancer ?

   1
   un demi
   0

7. Un sac contient sept boutons. Trois d'entre eux sont verts. Quelle est la probabilité d'extraire au hasard un bouton vert du sac ?

   un septième
   deux septièmes
   trois septièmes

8. Quelque chose qui a autant de chances d'arriver ou de ne pas arriver a une probabilité de

   100 %
   50 %
   0 %

9. Un sac contient seulement 5 boutons, qui sont tous bleus. Quelle est la probabilité d'extraire au hasard un bouton rouge du sac ?

   0
   0,5
   1

10. Un sac contient quatre boutons blancs. Combien de boutons noirs faut-il ajouter pour avoir autant de chances de tirer au hasard un bouton noir ou un bouton blanc du sac ?

   4
   8
   0

Jeu équitable ou non ?

Dans cette activité, les élèves explorent deux jeux pour deux joueurs. Ils débattent du fait que le jeu est ou non équitable. Le premier jeu n'est pas équitable et cela doit apparaître en jouant. Le second jeu est équitable, ce qui est plus difficile à observer et leur avis peut être partagé.

À un premier niveau, il n'est pas attendu des élèves de calculer des probabilités, mais de développer une intuition des chances et de leur probabilité de gagner.

Jeu 1
À chaque partie, on lance deux dés et on multiplie les chiffres obtenus. Le joueur 1 gagne si le produit est impair. Le joueur 2 gagne si le produit est pair.
Le binôme joue un grand nombre de parties en prenant note du nombre de victoire de chaque joueur. Une discussion s'engage ensuite pour savoir si le jeu est équitable ou quel joueur, sinon, est avantagé.

Jeu 2
À chaque partie, on lance deux dés et on additionne les chiffres obtenus. Le joueur 1 gagne si la somme est impaire. Le joueur 2 gagne si la somme est paire.
Le binôme joue un grand nombre de parties en prenant note du nombre de victoire de chaque joueur. Une discussion s'engage ensuite pour savoir si le jeu est équitable ou quel joueur, sinon, est avantagé.

On peut mettre en commun les données de la classe, notamment à propos du jeu 2. On peut ensuite, selon le niveau d'apprentissage, raisonner sur les tables de multiplication et d'addition pour calculer les probabilités.

produit	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

somme	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Jeu et stratégie : « Qui peut le plus ? »

L'activité suivante a été expérimentée par Christelle BLEIN et Isabelle PINET en classe de cm2 dans le cadre de leur mémoire professionnel (www.statistix.fr).

Énoncé

Le jeu « Qui peut le plus » se joue avec un dé, en binôme. Chaque élève du binôme dispose d'une grille comme ci-contre, qu'il remplit à chaque partie.
Pour chaque partie, l'un des deux élèves du binôme est le lanceur de dé. Il lance le dé pour remplir chacune des trois lignes du tableau. Au premier lancer, chaque élève inscrit le chiffre obtenu, au choix, à droite ou à gauche de la première ligne (sur l'exemple, on a obtenu 5 et l'élève 1 à choisi de

élève 1	
5	3
1	2
4	4

109

élève 2	
5	3
2	1
4	4

118

l'inscrire sur la première ligne à gauche). Au second lancer, on complète la première ligne (on n'a plus le choix : ici le 3 est sorti). On complète de même les deux autres lignes, avec le choix de la position, à droite ou à gauche, aux troisième et cinquième lancers.
Chaque élève additionne ensuite les trois nombres à deux chiffres obtenu (pour l'élève 1, 53 + 44 + 12 = 109) et inscrit la réponse dans la dernière case.
Les élèves du binôme comparent leurs résultats. Celui qui a le plus grand résultat gagne 2 points, celui qui a le plus petit marque 0 point et en cas d'égalité, chacun marque un point.

1. Première mise en commun après quelques parties. Quel est le plus grand nombre obtenu ? Est-ce que tout le monde pouvait l'obtenir ? Quel est le plus grand nombre possible ? Est-ce que certaines faces apparaissent plus souvent que d'autres quand on lance les dés ?
2. Après quelques nouvelles parties, écrire des « règles » pour le placement du premier chiffre obtenu avec le dé.
3. Mise en commun des « règles » et discussion sur les « chances » de réussite des stratégies.
Exemple de « règles » observées :
– si le premier dé donne 6, j'écris 6 à gauche ;
– si le premier dé donne 5, j'écris 5 à gauche ;
…
– si le premier dé donne 1, j'écris 1 à droite.
4. Vous avez beaucoup joué aux dés. Avez-vous l'impression que certains chiffres reviennent plus souvent ? Comment faire pour le savoir ?
5. En supposant que les six chiffres du dés ont la même probabilité de sortie, quelle est la probabilité de réussite de la règle « si le premier dé donne 5, j'écris 5 à gauche » ?

Éléments de réponse
4. On peut exploiter les grilles de jeu pour comptabiliser la fréquence d'apparition de chaque face du dé pour la classe. On peut compléter l'observation par une simulation.
5. La règle « si le premier dé donne 5, j'écris 5 à gauche » comporte 5 cas favorable 51 ; 52 ; 53 ; 54 ; 55 (que l'on convient de considérer comme « gagnant ») et un cas défavorable 56. Ces cas étant équiprobables, la probabilité de réussite de la règle est 5/6.
On raisonne de même pour les autres règles : certitude pour « le 6 à gauche » et « le 1 à droite », probabilité 5/6 pour « le 2 à droite » et probabilité 4/6 pour « le 4 à gauche » et « le 3 à droite ».

Des exemples d'activités praticables au niveau 2

Les « repères de progressivité » du programme de cycle 4 indiquent qu'à partir « de la 4^{e}, l'interprétation fréquentiste permet d'approcher une probabilité inconnue et de dépasser ainsi le modèle d'équiprobabilité mis en œuvre en 5^{e} ». Par « interprétation fréquentiste » de la notion de probabilité, il faut comprendre l'observation de la « stabilisation » des fréquences vers la probabilité de l'événement lorsque le nombre de répétitions de l'expérience aléatoire augmente. Un premier lien entre statistique et probabilités est réalisé dès la classe de cinquième lors des expérimentations menées en classe, qu'elles soient physiques ou simulées, par des relevés d'effectifs et de premiers calculs de fréquences (la notion de fréquence est en construction). À partir de la quatrième, il peut s'agir de comparer des graphiques de distributions de fréquences et de probabilités, d'observer la fluctuation des fréquences pour un nombre fixé n de répétitions de l'expérience aléatoire, de constater que ces fluctuations sont moindres pour de grandes valeurs de n. On peut réserver pour un « niveau 3 » la création de graphiques permettant d'observer la

stabilisation des fréquences en fonction du nombre *n* de répétitions de l'expérience aléatoire, niveau attendu en fin de cycle 4, abordable dans certaines situations, ou par certains élèves, en fin de quatrième.
À titre de comparaison, on peut considérer les contenus du *Common Core*, équivalent aux Etats-Unis de notre « socle », que l'on trouve à l'adresse suivante.
http://www.corestandards.org/Math/Content/SP/
Les probabilités sont introduites en 7th Grade, équivalent de notre classe de 5^{e}, avec une interprétation fréquentiste très aboutie. Au paragraphe « Étudier des expériences aléatoires et concevoir, utiliser et évaluer des modèles probabilistes » sont listées quatre « compétences » (ou capacités). La première est de « niveau 1 » : « Comprendre que la probabilité d'un événement est un nombre entre 0 et 1 exprimant les chances de réalisation de l'événement. Plus le nombre est grand, plus les chances sont importantes. Une probabilité proche de 0 indique un événement peu probable, une probabilité autour de ½ indique un événement également probable ou improbable, et une probabilité autour de 1 indique un événement très probable. ». La deuxième est de « niveau 2 » : « Approcher la probabilité d'un événement en recueillant des données à partir de l'expérience aléatoire qui le produit, en observant sa fréquence à long terme, et en estimant la probabilité correspondante. ». La troisième compétence va plus loin et concerne la modélisation : « Élaborer un modèle de probabilités et l'utiliser pour trouver des probabilités d'événements. Comparer les probabilités du modèle aux fréquences observées ; si la différence est importante, expliquer les sources possibles de l'écart. […] Construire un modèle de probabilités (qui peut ne pas être celui de l'équiprobabilité) en observant les fréquences sur des données obtenues à partir de l'expérience aléatoire. ». Dans le cadre de la quatrième compétence concernant les probabilités d'événements « composés », on lit : « Concevoir et utiliser une simulation pour générer des fréquences pour des événements composés. Par exemple, utiliser des nombres aléatoires comme outil de simulation pour répondre approximativement à la question suivante : si 40 % des donneurs ont un sang du groupe A, quelle est la probabilité de devoir solliciter au moins 4 donneurs avant d'en trouver un de groupe A ? ».

Les familles de deux enfants

Énoncé

Des élèves doivent résoudre le problème de probabilités suivant.

On prend au hasard une famille parmi les familles françaises ayant deux enfants. Quelle est la probabilité que cette famille ait une fille et un garçon ?

N'ayant pas accès aux archives de l'état civil, les élèves supposent que la probabilité d'avoir une fille est égale à la probabilité d'avoir un garçon et raisonnent à partir de cette hypothèse.
Enzo propose la solution suivante : il y a trois cas possibles, la famille a deux filles, la famille a deux garçons ou la famille a une fille et un garçon. La probabilité cherchée est donc 1/3.
Jade n'est pas d'accord. Il faut, dit-elle, tenir compte de l'ordre des naissances. Il y a en fait quatre cas possibles : la famille a deux filles, la famille a deux garçons, la famille a eu une fille puis un garçon ou la famille a eu un garçon puis une fille. La probabilité cherchée est donc 2/4 c'est-à-dire 0,5.
1. À votre avis, qui a raison, Jade ou Enzo ?
2. Pour se faire une opinion, Tom propose une expérience aléatoire à l'aide de deux pièces de monnaie. Décrire une telle expérience aléatoire et la réaliser 10 fois. Que peut-on conclure ?
3. Voici le résultat de 50 expériences réalisées par Tom (F signifie « fille », G signifie « garçon » et, pour chaque expérience, les résultats sont inscrits l'un après l'autre).

FG **GG** FF **FF** GF **FF** GF **FF** GF **FF** FG **GF** FG **FF** FF **GF** GF **GG** GG **GG** GG **FF** FG **FG** FF
FF FG **GF** GG **GF** GF **FF** GG **GF** FG **GG** FG **FF** GG **FG** FF **FG** GF **FG** FF **GG** GG **FG** FF **GG**

En utilisant ces résultats, pouvez-vous préciser qui de Jade ou de Enzo semble avoir raison ?
Avec 50 autres expériences, est-ce que la réponse pourrait être différente ?
4. Exploiter une simulation sur tableur pour effectuer d'autres expériences.

Éléments de réponse
2. On lance les deux pièces en même temps. Face signifie « fille » et pile signifie « garçon », par exemple.
3. La fréquence des FG ou GF est 23/50 = 0,46. Jade semble avoir raison.
Avec 50 autres expériences, la réponse pourrait être différente. Il faudrait davantage d'expériences.
4. Les simulations de 50 expériences montrent des résultats fluctuant autour de 0,5.

G3 =NB.SI(D3:D52;"GG")

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Deux enfants**							
2	expérience	issue 1	issue 2	résultat			effectif	fréquence
3	1	F	F	FF		GG	11	0,22
4	2	G	G	GG		FF	15	0,3
5	3	F	F	FF		total	26	**0,52**
6	4	G	G	GG				
7	5	G	G	GG				
8	6	G	F	GF				

Jeu et stratégie : « Course de la somme de deux dés »

L'activité suivante illustre l'article de Heinz STEINBRING – *The theoretical nature of probability in the classroom* – 1991. On peut l'actualiser en introduisant la simulation.

Énoncé
Le jeu se joue à trois joueurs avec deux dés. Chaque joueur choisit l'un des nombres de 2 à 12 avec des choix différents. On lance les deux dés et on fait la somme des chiffres apparus. Si cette somme correspond à l'un des choix des joueurs, le joueur correspondant marque une croix dans sa colonne. Le premier joueur qui a réussi à compléter sa colonne avec des croix a gagné.

Arrivée										
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Départ										

1. Effectuer une partie et compléter, à chaque lancer le tableau suivant.

Somme des deux dés	Nombre de lancers avec cette somme
2	
3	
4	
56	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
Nombre total de lancers :	

2. Certains nombres permettent-ils de gagner plus sûrement que d'autres ? Expliquer.
3. Prolongement (cette question est proposée après la séance par exemple à la maison).
La table suivante comporte les différentes possibilités pour lesquelles chacune des sommes 2, 3, 4 apparaissent. Compléter la table.

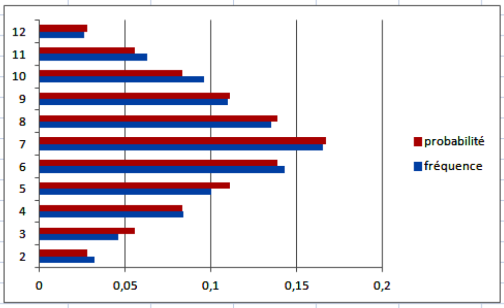
2	1 + 1		
3	1 + 2	2 + 1	
4	1 + 3	2 + 2	3 + 1
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Éléments de réponse
La compréhension de la règle du jeu est aisée et cet exemple peut être le premier rencontré d'une distribution non équiprobable.
L'activité peut se dérouler durant une séance de classe : 5 à 10 minutes de présentation ; 20 minutes de travail en groupe et au moins 10 minutes de discussion en classe entière.
La durée d'une partie dépend des choix effectués et de leurs probabilités p de succès. Le temps d'attente d'un succès correspond à une loi géométrique de paramètre p dont l'espérance est $1/p$. Le temps moyen de 10 succès « somme égale à 7 » est donc de $10\times\frac{1}{\frac{6}{36}}$ = 60 lancers.
2. La discussion peut se faire sur la base des observations des fréquences de chaque somme.

La simulation, par exemple à l'aide d'un tableur, permet d'obtenir une distribution de fréquences sur un grand nombre de lancers.

B3 =ENT(6*ALEA()+1)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Course de la somme de deux dés								
2	expérience	dé 1	dé 2	somme		somme	effectif	fréquence	probabilité
3	1	3	5	8		2	32	0,032	0,02777778
4	2	5	6	11		3	46	0,046	0,05555556
5	3	4	6	10		4	84	0,084	0,08333333
6	4	1	2	3		5	100	0,1	0,11111111
7	5	2	4	6		6	143	0,143	0,13888889
8	6	1	4	5		7	165	0,165	0,16666667
9	7	4	6	10		8	135	0,135	0,13888889
10	8	1	1	2		9	110	0,11	0,11111111
11	9	5	6	11		10	96	0,096	0,08333333
12	10	4	5	9		11	63	0,063	0,05555556
13	11	4	4	8		12	26	0,026	0,02777778
14	12	2	4	6		total	1000	1	1
15	13	5	3	8					
16	14	3	2	5					



3. La table fait apparaître la distribution théorique des probabilités (en divisant par 36) sous forme d'un diagramme en barres horizontal, que l'on pourra comparer avec l'analogue obtenu sur les fréquences observées sur les parties jouées en classe ou les simulations.

2	1 + 1					
3	1 + 2	2 + 1				
4	1 + 3	2 + 2	3 + 1			
5	1 + 4	2 + 3	3 + 3	4 + 1		
6	1 + 5	2 + 4	3 + 3	4 + 2	5 + 1	
7	1 + 6	2 + 5	3 + 4	4 + 3	5 + 2	6 + 1
8	2 + 6	3 + 5	4 + 4	5 + 3	6 + 2	
9	3 + 6	4 + 5	5 + 4	6 + 3		
10	4 + 6	5 + 6	6 + 4			
11	5 + 6	6 + 5				
12	6 + 6					

Des exemples d'activités praticables au niveau 3

Le niveau 3 comporte des attendus de fin de cycle 4 à propos desquels une autonomie des élèves n'est visée qu'en classe de troisième : conception de simulations simples, avec le tableur ou le logiciel de programmation Scratch, réalisation ou interprétation d'un graphique montrant la stabilisation des fréquences d'un événement en fonction du nombre de répétitions indépendantes de l'expérience aléatoire. Certains éléments du niveau 3 ne seront des attendus qu'en classe de seconde : utilisation d'arbres simples, application de la règle de la somme ou du produit pour calculer des probabilités.

Expérimentation physique dans un manuel allemand (début de cycle 4 français)

Dans le manuel allemand suivant, en vigueur en classe de 7^{e} (équivalent de la 5^{e} française) dans le Land de Rhénanie-Westphalie, une activité d'introduction à l'estimation d'une probabilité par l'observation des fréquences est proposée en lançant des Legos de type 4 : la face du dessus est codée 4, celle de dessous 1, et les faces latérales 2, 3, 5 et 6.

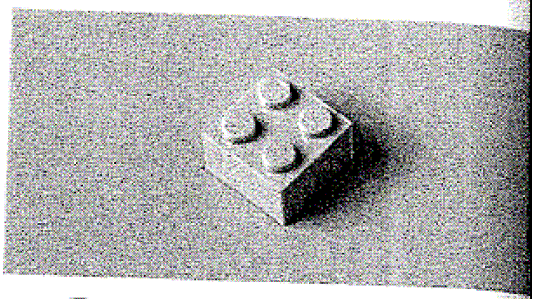
4.2.2 Schätzen von Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten – Prognose

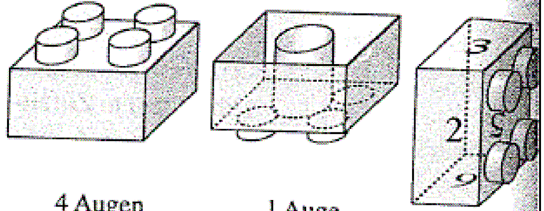
Philine und Sebastian wollen Mensch-ärgere-dich-nicht spielen, doch leider ist nirgendwo ein Würfel auffindbar.

Sebastian schlägt vor: „Lass uns doch einen Lego-Vierer zum Würfeln nehmen. Die vier Nippel oben sind vier Augen, der Nippel unten ist ein Auge. Die Seitenflächen beschriften wir mit 2, 3, 5 und 6."

Doch Philine hat Bedenken: „Beim gewöhnlichen Würfel erscheint die Sechs in etwa genauso häufig wie die anderen Augenzahlen auch. Mit diesem sonderbaren Würfel erhält man bestimmt nicht so viele Sechsen."

Hier stimmt Sebastian zu. Doch haben beide verschiedene Vermutungen, welche Augenzahl am häufigsten erscheinen wird.





4 Augen 1 Auge

Philine:

„Am häufigsten werden wir Vieren würfeln, da die Unterseite des Steines am größten und sehr standsicher ist."

Sebastian:

„Beim Werfen wird es sehr viele Einsen geben, da der Stein oft auf den vier schweren Nippeln landet."

Philine schlägt zur Entscheidung vor: „Lass uns vor dem Spiel etliche Male würfeln und schauen, wie oft die einzelnen Augenzahlen erscheinen."

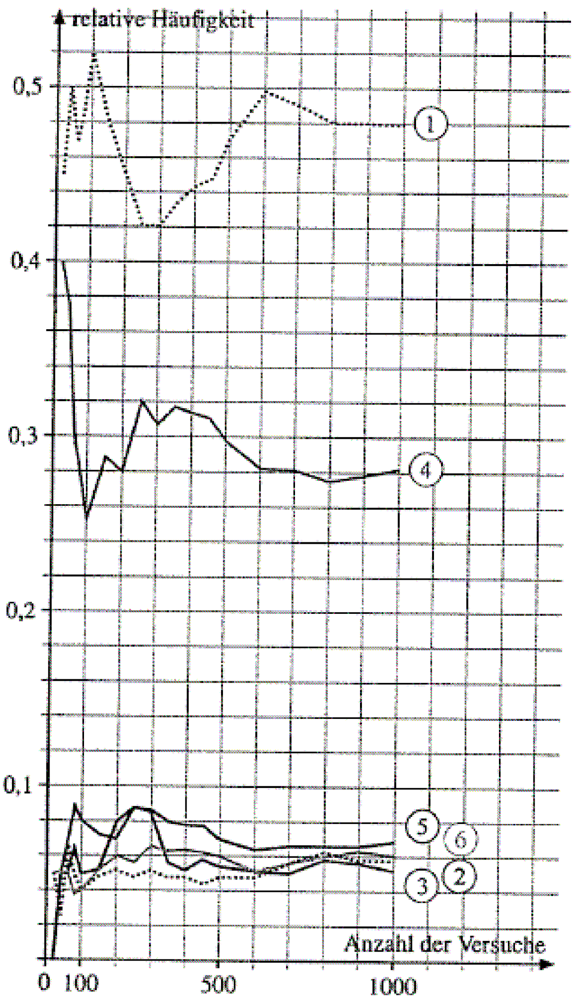
Ergebnisse des Entscheidungsversuchs:

Gesamtzahl der Würfe	Anzahl der Würfe mit Augenzahl					
	1	2	3	4	5	6
20	9	1	1	8	0	1
40	20	1	2	13	2	2
60	28	4	4	18	3	3
80	39	4	7	22	5	3
100	52	4	8	27	5	4
150	72	8	11	43	8	8
200	90	11	14	57	16	12
250	105	12	17	80	22	14
300	126	16	20	92	26	20
350	152	17	20	111	28	22
400	177	19	21	126	31	26
450	201	20	26	140	35	28
500	235	24	27	149	35	30
600	299	29	32	169	39	32
700	343	39	35	197	46	40
800	383	50	46	220	53	48
900	432	52	50	250	59	57
1000	478	58	52	282	69	61

Auswertung: Um die erhaltenen absoluten Häufigkeiten besser miteinander vergleichen zu können, berechnen Sebastian und Philine jeweils die relativen Häufigkeiten für die einzelnen Augenzahlen. Damit zeichnen sie für jede Augenzahl den Graphen der Zuordnung
Anzahl der Würfe → relative Häufigkeit
(Bild rechts). Diesem Graphen entnehmen wir:
Zu Beginn der Würfelserie treten noch große Schwankungen der relativen Häufigkeiten auf. Je öfter aber gewürfelt wird, desto weniger ändern sich die relativen Häufigkeiten:
Augenzahl 1 tritt am häufigsten auf in ungefähr 48% der Fälle, Augenzahl 4 in 28% der Fälle. Die übrigen Augenzahlen sind gleichberechtigt und treten alle in ungefähr 6% der Fälle auf.
Ein Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel mit diesem Lego-Vierer als Würfelersatz würde also im Mittel lange Wartezeiten auf die Sechs ergeben. Aber zu diesem Spiel ist es nun für Sebastian und Philine auch schon zu spät geworden…

Ergebnis: Sebastians Vermutung stimmt. Mit dem Lego-Vierer würfelt man am häufigsten Einsen.

Anregung: Wirf doch selber einmal mit einem Lego-Vierer und vergleiche deine Ergebnisse mit denen von Sebastian und Philine.

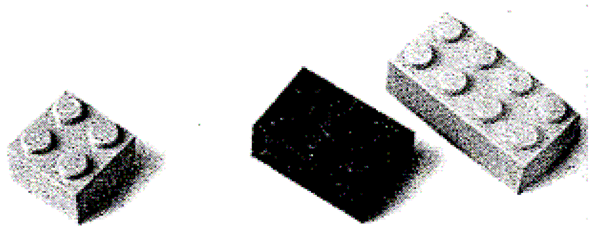


Des graphiques indiquant la fréquence de chaque face en fonction du nombre de lancers sont tracés. En exercice, on demande d'estimer les probabilités de sortie de chaque face des Legos de type 6 et 8.

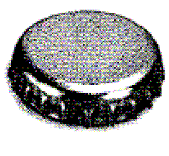
Ermittle die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse beim Werfen eines

a) Lego-Sechsers; **b)** Lego-Achters.

Schätze zuvor und vergleiche mit dem Lego-Vierer.



Un exercice analogue avec des capsules de bouteilles est proposé :



b) Bei einer Versuchsreihe mit einem Kronenkorken wurden folgende Ergebnisse erzielt:

Anzahl der Würfe	50	100	200
Ergebnis: *liegt auf dem Rücken*	31	57	118
Ergebnis: *liegt auf dem Rand*	19	43	82

Berechne die relativen Häufigkeiten der beiden Ergebnisse und bestimme näherungsweise die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis *liegt auf dem Rücken*.
Beurteile danach die Seitenwahl mit einem Kronenkorken.

Le camion pizza

La situation suivante est issue de la thèse de Gwendolyn ZIMMERMANN – *Students'reasoning about probability, simulations during instruction* – 2002.

Énoncé

On donne à Stan le problème suivant à résoudre.

> Un camion pizza a établi que 60 % de ses commandes par téléphone concernent des pizzas avec viande (bœuf, salami, etc.) et que les 40 % restant sont des pizzas sans viande (fromage, végétarienne, etc.). On suppose que les commandes sont indépendantes.
> Quelle est la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées par téléphone soient toutes deux avec viande ?

Pour estimer cette probabilité, Stan utilise des boules de couleur. Il prend 6 boules rouges pour les pizzas avec viande et 4 boules vertes pour les pizzas sans viande. Il met les 10 boules dans un sac, le remue, prend au hasard une boule, note sa couleur et la remet dans le sac. Il effectue 50 fois l'expérience.

1. Pensez vous que les expériences de Stan lui permettront d'estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande ? Justifier.

Si vous ne pensez pas que les expériences de Stan fonctionnent, comment les modifieriez-vous pour estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande ?

2. On suppose que Stan a mené son expérience et obtenu les résultats suivants :

RRRVRRRVVVVRVRRVVVVRRRVRVRRVVVRRVVVRRVVRRRVVRVRVVR

Pouvez-vous utiliser ces résultats pour estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande ? Si la réponse est oui, effectuer les calculs et expliquez votre raisonnement. Si la réponse est non, expliquez pourquoi.

Prolongement possible

3. Reproduire la feuille de calcul suivante pour simuler 1 000 réalisations de l'expérience consistant à tirer au hasard et avec remise deux boules dans une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules vertes. L'instruction simulant un tirage est =SI(ALEA()<0,6;"R";"V"). L'instruction entrée en D3 et recopiée vers le bas est =CONCATENER(B3;C3).

B3 =SI(ALEA()<0,6;"R";"V")

	A	B	C	D
1	**Camion pizza**			
2	expérience	issue 1	issue 2	résultat
3	1	V	R	VR
4	2	V	V	VV
5	3	R	R	RR
6	4	R	R	RR
7	5	R	V	RV
8	6	R	V	RV

4. Utiliser la feuille de calcul pour estimer la probabilité que les deux prochaines pizzas commandées sont avec viande.

5. Quelle opération directe permet d'obtenir la probabilité recherchée avec les données « 60 % des pizzas sont avec viande, 40 % sont sans viande » ?

Éléments de réponse

1. On peut penser qu'il faudrait plutôt tirer deux boules avec remise.

2. On peut regrouper les observations deux par deux.

RR RV RR RV VV VR VR RV VV VR RR VR VR RV VV RR VV VR RV VR RR VV RV RV VR

On observe 5 résultats RR sur 25 couples d'où une fréquence de 0,2. On peut estimer que la probabilité cherchée est de l'ordre de 0,2. Mieux vaudrait cependant effectuer davantage d'expériences.

4. On utilise la fonction NB.SI du tableur.

G3 =NB.SI(D3:D1002;"RR")

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Camion pizza**							
2	expérience	issue 1	issue 2	résultat			effectif	fréquence
3	1	R	R	RR		RR	371	0,371
4	2	R	R	RR				
5	3	V	R	VR				
6	4	R	V	RV				

5. $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$.

Lancers francs

La situation suivante est issue de la thèse de Gwendolyn ZIMMERMANN – *Students'reasoning about probability, simulations during instruction* – 2002.

Énoncé

On demande à Laura de mettre en œuvre une simulation pour le problème suivant.

Les statistiques de basket de Sandra montrent que lorsqu'elle est à la ligne de lancers francs, celle-ci réussit environ 70 % de ses lancers francs.
Quelle est la probabilité que Sandra manque ses deux lancers francs ?

Pour estimer cette probabilité, Laura utilise des boules de couleur. Elle prend 7 boules rouges pour les lancers francs réussis et 3 boules bleues pour les lancers francs manqués. Elle met les 10 boules dans un sac, le remue, prend au hasard une boule, note sa couleur et la remet dans le sac. Elle effectue 50 fois l'expérience.

1. Pensez vous que les expériences de Laura lui permettront d'estimer la probabilité que les deux lancers francs soient manqués ? Justifier.
Si vous ne pensez pas que les expériences de Laura fonctionnent, comment les modifieriez-vous pour estimer la probabilité que les deux lancers francs soient manqués ?

2. On suppose que Laura a mené son expérience et obtenu les résultats suivants :

RBBBBRRBRBBBRRRRBBRBRRRRRRBBRBRRRBBRRRRRBBBRBRRBRR

Pouvez-vous utiliser ces résultats pour estimer la probabilité que les deux lancers francs soient manqués ? Si la réponse est oui, effectuer les calculs et expliquez votre raisonnement. Si la réponse est non, expliquez pourquoi.

Variation des petits échantillons et stabilisation des grands (fin de cycle 4)

Les questions suivantes demandent aux élèves de comparer des probabilités. Leurs réponses a priori peuvent permettre de détecter des biais de conception concernant la loi des grands nombres.

Dans un second temps, l'observation de simulations permet de connaître la bonne réponse à chaque question.

Énoncé

On lance une pièce supposée équilibrée. Pour chacune des questions suivantes, les deux événements ont-ils la même probabilité ou lequel est le plus probable ? Donnez vos raisons.

a) « Obtenir exactement 5 faces quand on lance la pièce 10 fois » ou « obtenir exactement 500 faces quand on lance la pièce 1 000 fois » ?
b) « Obtenir 4, 5 ou 6 faces quand on lance la pièce 10 fois » ou « obtenir 499, 500 ou 501 faces quand on lance la pièce 1 000 fois » ?
c) « Obtenir 4, 5 ou 6 faces quand on lance la pièce 10 fois » ou « obtenir entre 400 et 600 faces quand on lance la pièce 1 000 fois » ?

Éléments de réponse
a) L'événement le plus probable est : « obtenir exactement 5 faces quand on lance la pièce 10 fois ».
b) L'événement le plus probable est : « obtenir 4, 5 ou 6 faces quand on lance la pièce 10 fois ».
c) L'événement le plus probable est : « obtenir entre 400 et 600 faces quand on lance la pièce 1 000 fois ».
Exemple de simulation à l'appui des affirmations précédentes (échantillon de taille 1 000).

EPX5 =EPV5+SI(SOMME(EPW4:EPW13)=5;1;0)

	A	B	C	D	EPU	EPV	EPW	EPX
1	**Pile ou face**							
2	simulation	no 1	simulation	no 2	simulation	no 999	simulation	no 1000
3	pile ou face		pile ou face		pile ou face		pile ou face	
4	0	événement a 1)	1	événement a 1)	1	événement a 1)	1	événement a 1)
5	1	**1**	1	**1**	1	**435**	1	**435**
6	1	événement a 2)	0	événement a 2)	1	événement a 2)	1	événement a 2)
7	0	**0**	1	**0**	0	**51**	1	**51**
8	1	événement b 1)	1	événement b 1)	1	événement b 1)	0	événement b 1)
9	0	**1**	1	**1**	0	**1227**	1	**1227**
10	0	événement b 2)	1	événement b 2)	1	événement b 2)	1	événement b 2)
11	1	**0**	0	**0**	1	**157**	0	**157**
12	1	événement c 1)	1	événement c 1)	1	événement c 1)	1	événement c 1)
13	0	**1**	1	**1**	0	**1227**	1	**1227**
14	0	événement c 2)	0	événement c 2)	1	événement c 2)	0	événement c 2)
15	0	**1**	0	**2**	1	**1909**	0	**1910**
16	1		0		1		0	
17	0		0		1		1	

Les élèves qui surestiment la prédictibilité d'un événement individuel et ceux qui ont une mauvaise conception de la variabilité sur un petit échantillon et de la stabilisation sur un grand échantillon répondront mal à la question a).
Les questions b) et c) peuvent permettre d'identifier les élèves qui apprécient mal l'importance des fréquences des issues par rapport à leur effectif (3 issues sur 11 pour le nombre de faces sur 10 lancers et 3 issues sur 1 001 pour le nombre de faces sur 1 000 lancers).
Les élèves peuvent répondre mal à la question b) s'ils savent qu'il y a une stabilisation à long terme vers 0,5 (la moitié des lancers à peu près sont des faces) mais raisonnent dans l'absolu et non en relatif : variabilité plus faible pour 1 000 lancers mais très petit nombre relatif d'issues concernées.

Une réponse correcte à la question c) peut montrer que l'élève sait que bien que les fréquences des issues concernées soient analogues le nombre de face est plus proche de la moitié lorsqu'il y a un grand nombre de lancers.

Bibliographie

[1] BATANERO Carmen, BIEHLER Rolf, MAXARA Carmen, ENGEL Joachim, VOGEL Markus – *Using Simulation to Bridge Teachers´Content and Pedagogical Knowledge in Probability* – 15th ICMI Study Conference: The Professional education and development of teachers of mathematics, 2005.
[2] BLEIN Christelle, PINET Isabelle – Entre hasard et déterminisme : un jeu de dé pour apprendre l'aléatoire en cycle 3 – www.statistix.fr – 2007.
[3] Bulletin officiel de l'Éducation nationale – *Programmes pour le cycle 4* – BO spécial n° 11 du 26 novembre 2015.
[4] IREM de Paris-Diderot – *Journée « Maths Monde » consacrée aux probabilités* – http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/calendrier/27_mai_2009_journee_euromaths/
[5] JONES Graham, THORNTON Carol – *An overview of research into the teaching and learning of probability* – 2005.
[6] STEINBRING Heinz – *The theoretical nature of probability in the classroom* – 1991.
[7] VERDIER Jacques – *Le hasard au collège* – Bulletin APMEP n° 484 – 2009.
[8] ZIMMERMANN Gwendolyn – *Students'reasoning about probability, simulations during instruction* – 2002.